№ 6 | июнь 2019

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

№6
ИЮНЬ
2019

ВОРОНКА КОРИОЛИСА

ЛУНОХОД

1/3, ИЛИ ДВЕ НЕВОЗМОЖНЫЕ ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Enter

e-mail: kvantik@mccme.ru

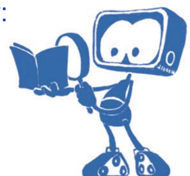
НАШИ НОВИНКИ

Кроме журнала редакция «Квантика» выпускает альманахи, календари загадок, наборы плакатов и книги серии «Библиотечка журнала «Квантик»

Недавно вышли в свет:

• Альманах «Квантик». Выпуск 12,
• Альманах «Квантик». Выпуск 13,
• второй выпуск «Библиотечки журнала «Квантик» – книга С. Н. Федина «Перепутаница».

Всю продукцию «Квантика» можно купить в магазине «Математическая книга» по адресу: г. Москва, Большой Власьевский переулок, д. 11 (сайт: **biblio.mccme.ru**), в интернет-магазине **kvantik.ru**, в магазинах «Библио-Глобус» и в других магазинах (список на сайте: **kvantik.com/buy**)



www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 6, июнь 2019 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Е. А. Котко, Р. В. Крутовский, И. А. Маховая, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Yustas

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ «Каталог Российской прессы» МАП (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка по «Каталогу Российской прессы» на сайте **vipishi.ru**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 5000 экз.
Подписано в печать: 07.05.2019
Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-Столица-8»
Тел.: (495)363-48-84
http://capitalpress.ru

Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ

КАК ЭТО УСТРОЕНО

Воронка Кориолиса. Окончание. *В. Сурдин* 2

Двойная тень. *С. Шашков* 10

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

В начале было слово. *А. Блинков* 6

ЧЕТЫРЕ ЗАДАЧИ

Говорят дети 14

ЗАДАЧИ В КАРТИНКАХ

Луноход. *М. Евдокимов* 15

Неисправный пиксель IV с. обложки

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СЮРПРИЗЫ

1/3, или Две невозможные задачи с решениями. *Г. Мерзон* 16

ЧУДЕСА ЛИНГВИСТИКИ

Счёт двадцатками. *Е. Смирнов* 18

ОПЫТЫ И ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Простые опыты с трубками. *А. Сорокин, К. Коханов, Д. Перевощиков, М. Уварова, А. Зеленеев* 21

ОЛИМПИАДЫ

LXXXV Санкт-Петербургская олимпиада по математике 24

Наш конкурс 32

ИГРЫ И ГОЛОВОЛОМКИ

Два симметрикса. *В. Красноухов* 26

ОТВЕТЫ

Ответы, указания, решения 27

ВОРОНКА КОРИОЛИСА

Владимир Сурдин

Окончание. Начало в «Квантике» № 5

Итак, часто можно услышать или прочитать, что эффект Кориолиса проявляется только на больших пространствах, а вот в небольшом сосуде, у себя дома, его заметить нельзя.

Действительно, Земля – не карусель, вращается медленно, поэтому на малых пространствах эффект Кориолиса заметить довольно сложно. Когда мы бежим стометровку, то не замечаем, чтобы нас заносило вправо. В районе экватора этот эффект вообще не проявляется, но именно там для любознательных туристов некоторые шутники иногда устраивают «демонстрацию» эффекта Кориолиса.

Любознательность, не подкреплённую знаниями, можно неплохо эксплуатировать и даже монетизировать. Один такой случай описан в книге американского астронома Филипа Плейта «Плохая астрономия: Разоблачение неверных представлений и ошибок, от астрологии до «мистификации» с посадкой на Луну»[1]. В этой книге рассмотрены типичные ошибки родителей и учителей при ответах на «детские» вопросы (Почему небо голубое? Почему бывает зима и лето? Почему Луна меняет свой вид?), а также разъяснены весьма серьёзные заблуждения, имеющие коммерческий и политический смысл: обладает ли астрология прогностической силой, имеют ли право некоторые компании продавать имена звёзд и т. п.

Так вот, в книге Плейта описан и замечательный пример того, как можно эксплуатировать интерес к науке у людей, не обременённых знанием её основ: «В городе Наньюки (Кения), расположенном на экваторе, один местный гражданин – Питер Мак-Лири – демонстрирует любознательным туристам следующий эффектный опыт: он проводит по земле линию, якобы отмечающую положение экватора, ставит по разные стороны от этой линии два чана с водой и открывает в их донышках отверстия. Вытекающая из северного чана вода закручивается по часовой стрелке, а из южного – против часовой. Мак-Лири

[1] Philip C. Plait, Bad Astronomy: Misconceptions and Misuses Revealed, from Astrology to the Moon Landing «Hoax»

объясняет, что это происходит под действием вращения Земли, и собирает с туристов деньги.

Но его доходы могли бы заметно поубавиться, если бы туристы лучше знали астрономию и физику. Действительно, в Северном и Южном полушариях Земли эффект Кориолиса закручивает потоки жидкости и газа в разных направлениях, в каждом случае – в направлении вращения Земли (правда, г-н Мак-Лири перепутал эти направления: в Северном полушарии потоки закручиваются против часовой стрелки). Но заметить эффект Кориолиса можно лишь в больших масштабах, например в атмосферных циклонах, а никак не в унитазе или кухонной раковине. Ясно, что Мак-Лири заранее раскручивал воду в своих чанах в разные стороны». Так пишет Филип Плейт.

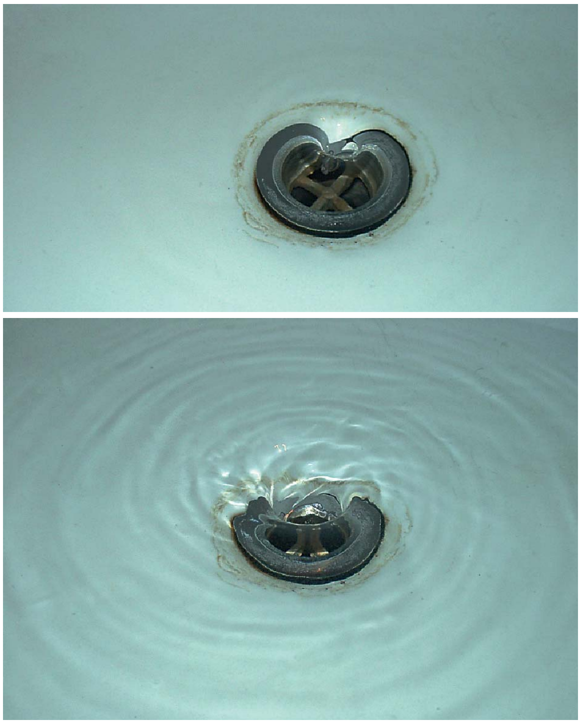
Ну что же, разоблачить мистификацию – дело полезное, даже если обманом подогревается любознательность наивных граждан. Действительно, вблизи экватора эффект Кориолиса практически отсутствует, поскольку ось вращения жидкости, сонаправленная с земной осью, будет параллельна поверхности Земли. В общем, можно поздравить автора книги «Плохая астрономия» с этой находкой; случай весьма поучительный – мистификатор пойман за руку. Но до конца ли прав сам разоблачитель обмана, считающий, что в масштабе тазика сила Кориолиса слишком мала, чтобы вызвать вращение воды в чане?

Как выясняется, это не так. Нужно лишь аккуратно провести эксперимент. Давайте сами поставим опыт с вытекающей из чана водой, который убедит нас, что даже в комнатных условиях можно заметить эффект Кориолиса!

Скажу сразу, что кухонная раковина и унитаз для этого действительно не очень подходят, но вот в ванне опыт удаётся; нужно лишь проявить аккуратность и немного терпения.

Итак, наберите полную ванну воды и дайте ей отстояться не менее 7–8 часов, а ещё лучше – часов 10–12. Это необходимо, чтобы прекратились хаотические движения воды. Проверить их наличие легко: бросьте в воду кристаллик марганцовки; он прочертит сиреневую линию от поверхности до дна. Если

линия остаётся прямой, значит, вода спокойна. Затем очень аккуратно, не погружая руку в воду, вытяните за цепочку пробку. Поднимайте её медленно и строго вертикально. Теперь ждите. Почти вся вода вытечет спокойно, без видимых движений. Но последние 2–3 литра воды продемонстрируют вам идеальный циклончик (см. фото ниже), всегда закрученный против часовой стрелки (если вы житель Северного полушария). Я сам много раз проделывал этот опыт с разными ваннами, и результат всегда получался именно такой.



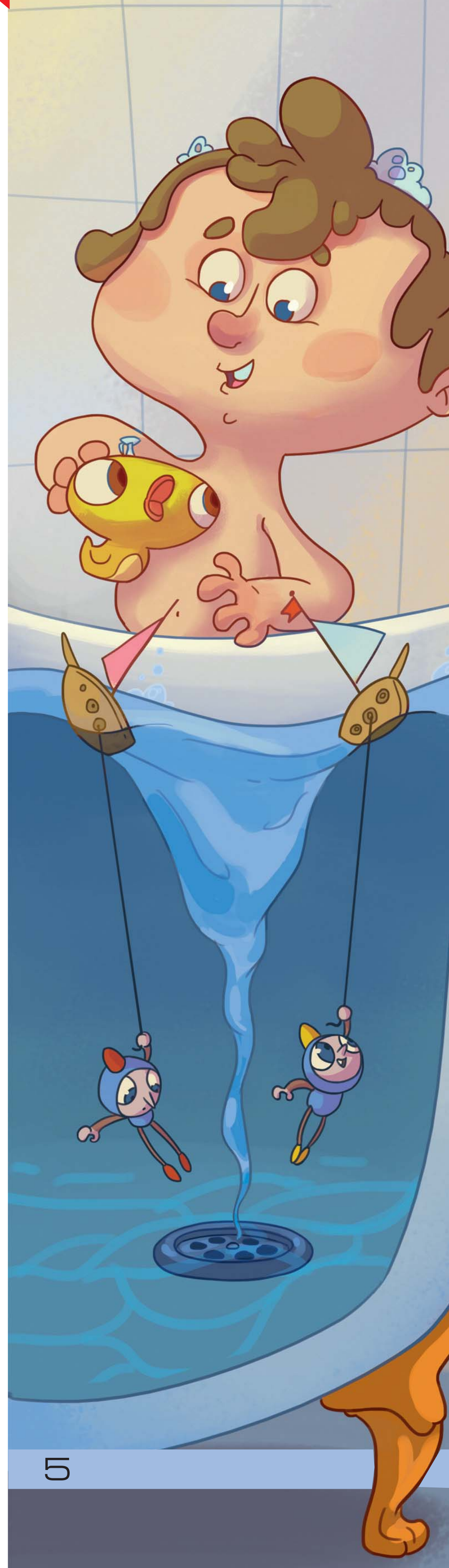
Тот факт, что водяная воронка появляется в последний момент, объясняется просто. В спокойном состоянии вода вместе с ванной и Землёй совершает один оборот в сутки. Это очень маленькая скорость. Но в процессе слива вода приближается к отверстию, и скорость вращения нарастает. Вы помните, как раскручивается фигуристка на коньках, сначала раскинув руки, а затем прижимая их к телу. Это можно проделать и дома на полу: раскинь руки, крутанись на носочке и прижми руки к груди. Чувствуешь, как возросла скорость вращения? Физики называют это *законом сохранения момента импульса*: когда вращающееся тело сжимается, оно начинает вращаться быстрее.

В ванне вода с расстояния в 1 метр от сливного отверстия приближается к нему на расстояние в 1 см. Из закона сохранения момента следует, что при уменьшении радиуса вращения в 100 раз во столько же раз должна возрасти линейная скорость вращения, а значит, период вращения вблизи сливного отверстия сокращается в 10 тысяч раз: с 24 часов до 10 секунд. При такой скорости уже неважно, измеряем мы вращение относительно звёзд или относительно ванны. Однако и 10 секунд – это слишком большой период, чтобы образовался водяной циклончик. В чём же дело?

А дело, оказывается, в вязкости воды! Её порции, покидающие ванну первыми, медленно вращаются относительно почти неподвижных, более далёких от сливного отверстия слоёв воды и за счёт трения передают им часть своего момента импульса. Вначале в ванне было около 300 литров воды, а при появлении «микроторнадо» остаётся всего 2–3 литра. Если бы вытекавшая вода передавала весь свой момент той воде, что остаётся в ванне, то последние её литры совершали бы вблизи отверстия более 10 оборотов в секунду! Поэтому даже небольшой вязкости воды, обеспечивающей передачу только 10% момента, оказывается достаточно для наблюдения эффекта Кориолиса в масштабах ванной комнаты.

Вот так, не выходя за порог дома, можно доказать, что Земля вращается, и даже определить, в каком полушарии планеты вы находитесь. Если вам случится оказаться в Южном полушарии, то проделайте этот опыт там и сообщите мне, куда вращалась вытекающая из ванной вода. Но если путешествие в Австралию у вас не запланировано, то можете посмотреть, как там уже проделали этот эксперимент, по адресу **youtu.be/ihv4f7VMeJw**. В этом эксперименте учли все особенности, которые могли повлиять на вращение. Помимо случайных водных потоков, оставшихся или возникших при остывании, это могут быть геометрия и незаметный наклон ванны, недостаточно круглая форма отверстия и даже шероховатости дна. Но если вы поставите эксперимент не вполне аккуратно, то воронка всё равно возникнет, однако её вращение уже не будет связано с движением Земли.

Художник Анна Горлач



Александр Блинков

В НАЧАЛЕ БЫЛО СЛОВО...

Юные читатели! Я уверен – ваши учителя говорили вам, что в математических высказываниях очень важна точность формулировок. Но одно дело слышать это, а совсем другое – убедиться на практике.

Рассмотрим несколько утверждений из школьного курса геометрии, которые звучат весьма правдоподобно, но верными, однако, не являются.[1] При этом к каждому из них достаточно добавить одно слово (возможно, в нескольких местах) – и оно станет верным!

Пример 1. Углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны.

Почему это неверно? Потому, что один из углов может быть острым, а другой – тупым (углы A и B соответственно на рисунке 1).

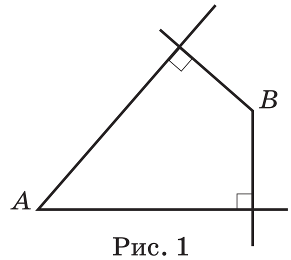


Рис. 1

Понятно, что вставив одно слово, мы получим верное утверждение, причём возможны два варианта: **острые (тупые)** углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны.

Аналогичная ситуация возникнет и в формулировке о *равенстве углов с соответственно параллельными сторонами*.

Пример 2. Общие внешние касательные к двум окружностям пересекаются на прямой, проходящей через их центры.

Действительно, если такие касательные пересекаются, то точка пересечения лежит на линии центров. Но если две указанные окружности имеют равные радиусы, то их внешние касательные параллельны (рис. 2).

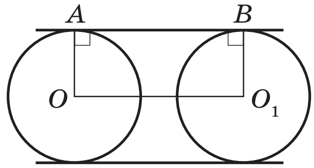


Рис. 2

[1] Напомним, что верными считаются утверждения, которые верны всегда. Скажем, утверждение «Четырёхугольник, все углы которого равны, является прямоугольником» верное, так как любой четырёхугольник, все углы которого равны, действительно будет прямоугольником, поскольку все его углы будут тогда прямыми. А утверждение «Четырёхугольник, все стороны которого равны, является квадратом» неверное, поскольку оно нарушается, например, для ромба с углами 60° и 120°.

Докажем это. Пусть A и B – точки касания равных окружностей с центрами O и O_1 с одной из указанных прямых. Тогда радиусы окружностей OA и O_1B перпендикулярны прямой AB, поэтому $OA \parallel O_1B$. Кроме того, $OA = O_1B$, следовательно, $OABO_1$ – параллелограмм, тогда $AB \parallel OO_1$ (*доказано даже, что $OABO_1$ – прямоугольник, но для наших целей это несущественно*). Аналогично доказывается, что вторая касательная параллельна OO_1. Следовательно, касательные параллельны друг другу.

Верное утверждение такое: общие внешние касательные к двум **неравным** окружностям пересекаются на прямой, проходящей через их центры.

Пример 3. Прямая, разбивающая четырёхугольник на два треугольника, содержит диагональ этого четырёхугольника.

В отличие от двух предыдущих примеров, понять, почему и это утверждение неверно, гораздо сложнее. Дело в том, что четырёхугольник может быть невыпуклым, и тогда его может делить на два треугольника прямая, содержащая сторону! Например, прямая CD, содержащая сторону четырёхугольника $ABCD$, разбивает его на два треугольника: ADE и BEC (рис. 3).

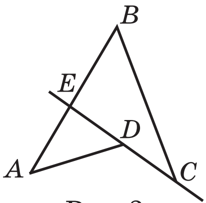


Рис. 3

Верное утверждение: прямая, разбивающая **выпуклый** четырёхугольник на два треугольника, содержит диагональ этого четырёхугольника.

В некоторых случаях, для того чтобы утверждение стало верным, приходится добавить не одно слово, а целое словосочетание.

Пример 4. Если точка равноудалена от прямых, содержащих стороны треугольника, то она является центром вписанной в него окружности.

Центр вписанной окружности действительно равноудалён от сторон треугольника. Но единственная ли это точка, обладающая таким свойством? Чтобы понять это, вспомним: центр вписанной окружности обладает этим свойством потому, что является точкой пересечения биссектрис всех углов треугольника. Но прямые, содержащие стороны треугольника, образуют ещё и внешние углы этого же треугольника.

Тогда, например, точка Q пересечения биссектрис двух его внешних углов B и C равноудалена от их сторон, то есть равноудалена от прямых AB, AC и BC (рис. 4).

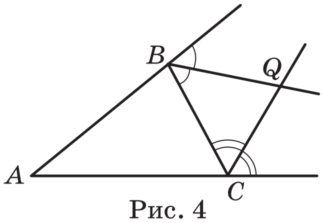


Рис. 4

Подумайте: 1) *Лежит ли точка Q на биссектрисе угла BAC?* 2) *Сколько существует точек, равноудалённых от прямых, содержащих стороны любого треугольника?*

А мы уже можем сформулировать верное утверждение, добавив словосочетание: если точка, **лежащая внутри треугольника**, равноудалена от прямых, содержащих стороны треугольника, то она является центром вписанной в него окружности.

Пример 5. Прямая, делящая площадь треугольника пополам, содержит его медиану.

Это было бы верным, если бы указанная прямая делила треугольник на два треугольника. Но возможна иная ситуация: прямая разбивает треугольник на треугольник и четырёхугольник. Пусть дан треугольник ABC, в котором $AC = 2$, отрезок DE с концами на сторонах AB и BC параллелен AC и $DE = \sqrt{2}$ (рис. 5). Тогда треугольник ABC подобен треугольнику DBE с коэффициентом $\sqrt{2}$, откуда площадь ABC в два раза больше площади DBE. Тем самым прямая DE делит площадь треугольника ABC пополам, но не содержит медиану этого треугольника.

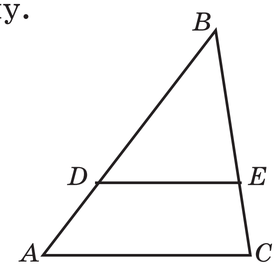


Рис. 5

Для получения верного утверждения здесь также придётся добавить словосочетание: прямая, **проходящая через вершину** и делящая площадь треугольника пополам, содержит его медиану.

Необходимость точных формулировок (и не только в математике!) понимали ещё древние греки. Они ввели термин «логос», который в древнегреческой философии означал одновременно «слово» (высказывание, речь) и «понятие» (суждение, смысл).

В заключение – упражнения для самостоятельного решения.

УПРАЖНЕНИЯ

Объясните, почему сформулированные ниже утверждения не являются верными. Измените эти утверждения, вставив слово (в заданиях 1–10) или словосочетание (в заданиях 11–17) так, чтобы утверждения стали верными.

1) В треугольниках напротив равных сторон лежат равные углы.

2) Если катет и прилежащий к нему угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

3) Если две стороны и высота, проведённая к третьей стороне одного треугольника, соответственно равны двум сторонам и высоте, проведённой к третьей стороне другого треугольника, то такие треугольники равны.

4) Точки плоскости, удалённые на данное ненулевое расстояние от заданной точки O, образуют окружность с центром O.

5) Равные хорды окружности стягивают равные дуги.

6) Две общие касательные к двум неравным окружностям пересекаются на прямой, содержащей их центры.

7) Наименьший диаметр окружности, внутри которой можно поместить данный треугольник, – это диаметр окружности, описанной около треугольника.

8) Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины её сторон.

9) Если все стороны и диагональ одного четырёхугольника соответственно равны сторонам и диагонали другого четырёхугольника, то равны и другие их диагонали.

10) Середины трёх высот треугольника не лежат на одной прямой.

11) В равнобедренном треугольнике медиана является биссектрисой и высотой.

12) Если точка равноудалена от сторон угла, то она лежит на биссектрисе этого угла.

13) Площадь треугольника равна половине произведения стороны и высоты.

14) Равным наклонным к прямой соответствуют равные проекции.

15) Касательная к окружности перпендикулярна её радиусу.

16) Диаметр окружности, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей.

17) Параллелограмм не имеет оси симметрии.

Художник Алексей Вайнер

Сергей Шашков

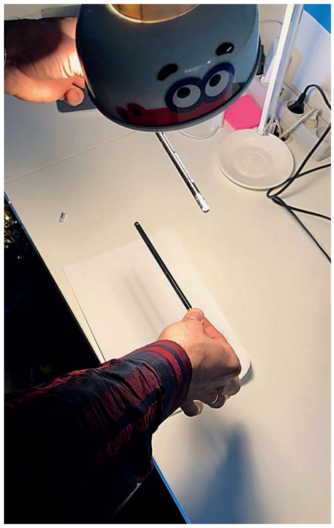
ДВОЙНАЯ ТЕНЬ

В «Квантике» №4 за 2019 год была задача:

В солнечный день иногда можно наблюдать такое явление. Две параллельные ветки дерева отбрасывают тени: нижняя ветвь – резкую и тёмную, а верхняя – более широкую и светлую. Если эти две тени случайно налагаются друг на друга, то посередине тёмной тени возникает светлая полоса.

Похожее явление можно наблюдать и в помещении: если освещать пол белым экраном смартфона, то два карандаша друг над другом оставляют как раз такую тень со светлой полосой.

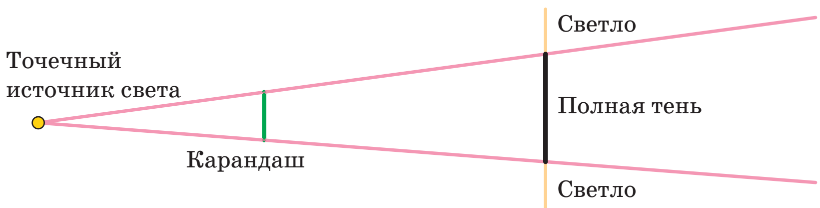
Почему так происходит?



Чтобы двойная тень хорошо наблюдалась, нужен достаточно большой равномерный источник света, например белый экран смартфона, матовая лампочка (см. фото) или солнце. Возьмём лампочку или фонарик и направим на лист бумаги. Поместим между лампочкой и бумагой карандаш. Разберём, как устроена его тень.

Лист бумаги шершавый и неровный. Каждая его точка отражает падающий свет во все стороны. Мы видим некоторые части листа ярче, а другие – темнее, потому что на разные части падает разное количество света. Чем больше света падает на кусочек бумаги, тем ярче и светлее он выглядит.

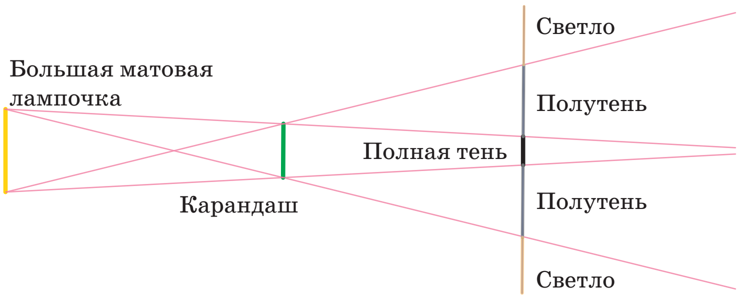
В свете точечного источника (маленькой лампочки или фонарика смартфона) карандаш отбрасывает резкую тёмную тень. Это легко понять: карандаш либо полностью закрывает лампочку, и тогда там совсем темно, либо вообще не закрывает, и там совсем светло.



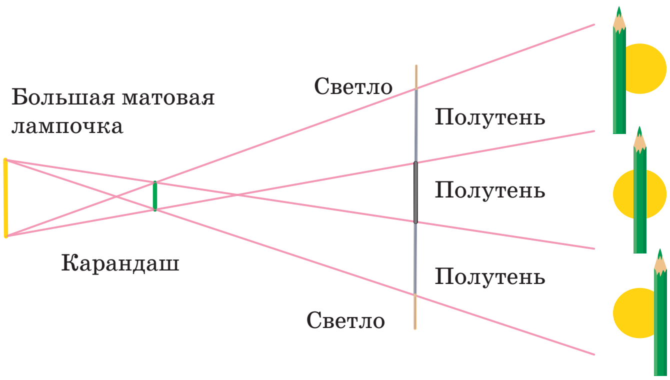
Если источник света достаточно большой, картина становится хитрее. Обычная лампа накаливания нам не подойдёт: нить накаливания и довольно длинная, и сложной формы. А вот матовые лампочки-груши дают подходящий свет.

Большой равномерный источник света можно представлять себе как множество мелких одинаковых лампочек, одинаково светящих во все стороны. Белый экран смартфона примерно так и устроен. А колба матовой лампочки сделана из «шершавого» стекла или пластика, каждая точка которого рассеивает свет в разные стороны. Если источник света достаточно далеко, яркость кусочка бумаги пропорциональна числу этих мелких лампочек, которые из неё видны.

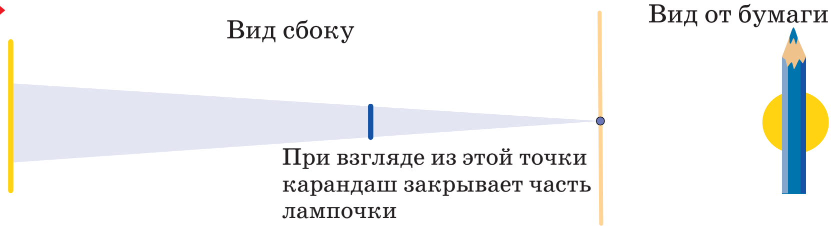
Расположим карандаш недалеко от бумаги. Будут видны чёткая полная тень и блёклая полутень. В полной тени карандаш закрывает лампочку целиком, в блёклой – закрывает лишь часть лампочки.



Если карандаш находится достаточно далеко от бумаги, то полной тени вообще не будет видно:

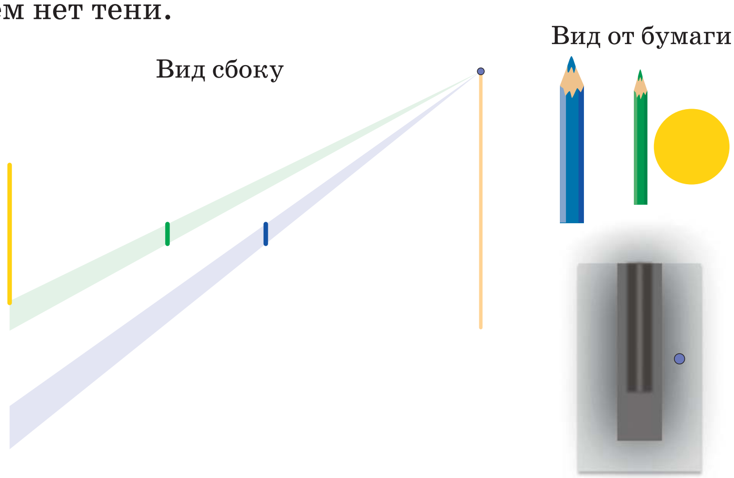


Теперь будем смотреть с листа бумаги на лампочку. Чем больше угол, под которым мы видим лампочку, тем больше света падает в эту точку и тем ярче мы её видим. Тень возникает как раз потому, что карандаш закрывает часть лампочки:

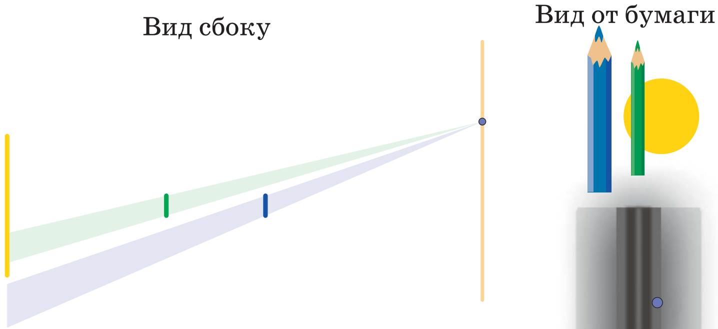


Наконец, расположим два карандаша один над другим. Зелёный карандаш, который ближе к лампочке, отбрасывает широкую блёклую тень. Синий карандаш, который ближе к бумаге, отбрасывает более узкую и более тёмную тень. Он закрывает бо́льшую часть лампочки, поэтому тень от него темнее.

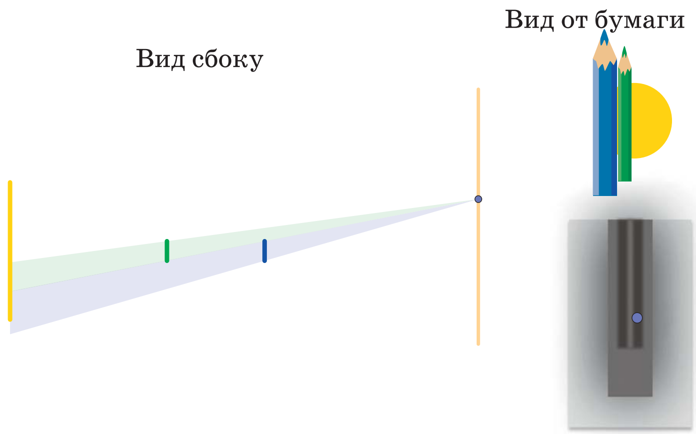
Будем двигаться по листу бумаги издалека к самой середине тени и смотреть на лампочку. Вдалеке карандаши вообще не закрывают лампочку, там совсем нет тени.



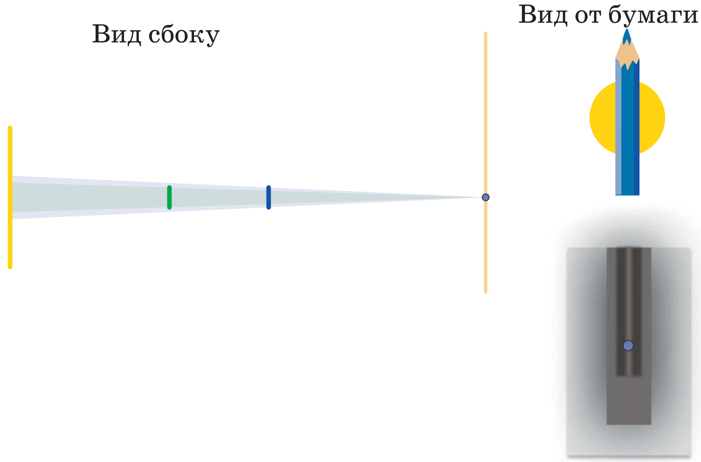
Потом дальний от бумаги зелёный карандаш начинает закрывать часть лампочки и вскоре станет располагаться как бы «на фоне» лампочки. Небольшие сдвиги не будут менять яркость точки, мы будем видеть на бумаге просто более тёмную область.



Дальше синий карандаш тоже начинает закрывать часть лампочки. Тень становится темнее, так как карандаши вместе закрывают всё бóльшую часть лампочки.



Но вскоре дальний зелёный карандаш начнёт закрываться ближним синим, и видимая часть лампочки начнёт увеличиваться. Наконец, дальний карандаш окажется полностью за ближним и не будет создавать дополнительной тени. Яркость бумаги в этом месте будет такой, как будто первого карандаша просто нет. Эта область и есть та «белая» полоса внутри тёмной тени. И полоска эта не такая уж светлая, она чуть темнее большой расплывчатой тени от первого карандаша. Но на фоне тёмной тени от второго она кажется белой.



Кстати, если в тени верхнего карандаша расположить слегка изогнутый провод, то и внутри тени провода будет белая полоса, изгибающаяся вместе с ним.

Художник Мария Усеинова

ГОВОРЯТ ДЕТИ

1. Маленькой Маше два года. Однажды Маша немножко посмотрела телевизор в детском магазине, а на следующий день попросила родителей, чтобы ей показали «Типыды́я». Какой мультфильм хотела посмотреть Маша?

Б.Л.Гуревич

2. Четырёхлетний Лёва любит надувать щёки, то есть, как он сам это называет, «________ __________ щёки». Во «взрослом» русском языке есть выражение, в котором после «________ __________» фигурирует название другой части тела. Напишите это выражение.

И.Б.Иткин

3. Бабушка рассказывала маленькой Свете о событиях, описанных в Библии. Услышав название одного города, Света весело спросила:
– А мы поедем туда есть вафли?

Как называется город, в который хочет поехать Света?

Д.А.Леонтьева, С.А.Леонтьева

4. Разыгрывая с внучкой по ролям сказку «Золушка», бабушка в роли Принца спрашивала:
– Почему тебя зовут Золушка?

На что внучка находчиво отвечала: – Потому что я приехала сюда ________ ________ __________.

Заполните пропуск.

С.И.Переверзева

Художник Анна Горлач

ЛУНОХОД

Луноход ездит по поверхности планеты, имеющей форму шара с длиной экватора 400 км. Планета считается полностью исследованной, если луноход побывал на расстоянии по поверхности не более 50 км от каждой точки поверхности и вернулся на базу (в исходную точку). Может ли луноход полностью исследовать планету, преодолев не более

а) 600 км; б) 570 км?

Если задача покажется сложной, решите её сначала для незамкнутой траектории, когда луноходу не обязательно возвращаться на базу.

Автор Михаил Евдокимов
Художник Алексей Вайнер

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СЮРПРИЗЫ

Григорий Мерзон

1/3, ИЛИ ДВЕ НЕВОЗМОЖНЫЕ ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

– Мы сами знаем, что она не имеет решения, – сказал Хунта, немедленно ощетиниваясь. – Мы хотим знать, как её решать.

А. и Б. Стругацкие, «Понедельник начинается в субботу»

Задача 1.

Квантик хочет разыграть приз между тремя читателями (так, чтобы у каждого была одинаковая вероятность получить приз). Как ему это сделать, если у него есть только правильная монета (то есть, у этой монеты орёл или решка выпадают с вероятностью 1/2)?

Задача 2.

Математики А и Б заключены в одиночных камерах. Каждый из них должен подкинуть правильную монету 1000 раз, после чего назвать по одному числу, a и b. Если каждый угадал номер одного из орлов в последовательности партнёра, то обоих отпустят. Как им действовать, чтобы освободиться с вероятностью больше 1/4?

На первый взгляд, в обеих задачах просят невозможного. Действительно, в первой задаче если монетку подкидывали дважды, то вероятность любого исхода – сколько-то четвёртых, трижды – сколько-то восьмых, четырежды – сколько-то шестнадцатых… короче говоря, может получиться только дробь, знаменатель которой – степень двойки, но никак не 1/3.

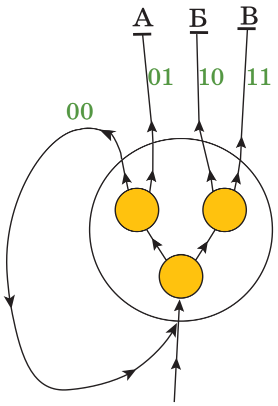
Невозможность во второй задаче ещё более очевидна: никакой информацией А и Б обмениваться не могут, их монеты никак не связаны, так что на a-м месте у Б орёл будет стоять с вероятностью 1/2, на b-м месте у А – аналогично, а вероятность того, что оба они угадают, будет равна 1/4.

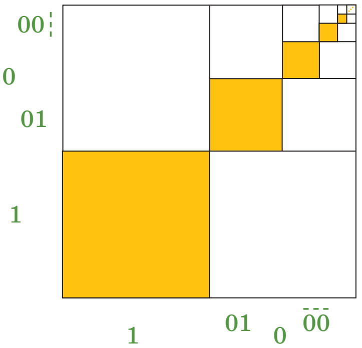
И тем не менее…

– Кажется, понимаю… – Глаза дятла Спятла вспыхнули. – Мы можем запустить здесь рекурсию!!!

К. Кохась, «Экскурсия»
(Квантик №2, 2017)

Решение задачи 1. Подкинем монетку дважды. Если выпало 01 (решка, потом орёл) – отдадим приз первому читателю, 10 – второму, 11 – третьему, а если 00… – повторим процедуру. Ясно, что вероятность получить приз у всех троих одинакова, а рано или поздно орёл выпадет.





Подумав ещё об этом решении и посмотрев на картинки, скажите, кстати, чему равна (бесконечная!) сумма 1/4+1/16+1/64+… (А как этот результат обобщить?..)

Решение задачи 2. Пусть каждый называет номер первого выпавшего у него орла. Посмотрим на ситуацию после того, как оба кинули монетку по одному разу. Если у них выпало 0 и 1 или 1 и 0 – то они проиграли, если 1 и 1 – выиграли. А если 0 и 0 – нужно кидать монеты снова… В точности как в решении предыдущей задачи, получается вероятность успеха 1/3 (на самом деле чуть-чуть меньше, если монеты кидают не бесконечно долго, а «всего» по 1000 раз).

Оказывается, можно придумать более сложную стратегию, вероятность успеха для которой – 35%. Но является ли она оптимальной – никто не знает! Доказано только, что добиться успеха с вероятностью, большей 37,5%, невозможно.

Художник Мария Усеинова

Евгений Смирнов

Счёт двадцатками

Наверное, многие обращали внимание, что среди русских числительных есть одно исключительное, образующееся не так, как остальные: это числительное «сорок». Другие числительные, обозначающие десятки, образуются регулярно – двадцать, тридцать, пятьдесят, шестьдесят… А 40 выбивается из общего правила, это почему-то не «четыредцать» и не «четырдесят». Кстати, во многих славянских языках такой нерегулярности нет: например, по-сербски 40 будет «четрдесет», а по-болгарски «четиридесет».

Почему так? По наиболее распространённой версии когда-то слово «сорок» обозначало связку из 40 меховых шкурок (например, белки, куницы или соболя) – такое количество шкурок требовалось для того, чтобы сшить шубу, и оно стало общепринятой единицей в торговле и взаиморасчётах. Кстати, счёт мехов на «сорока́» встречался вплоть до XIX века. Изначально же слово «сорок», как считают некоторые исследователи, обозначало ткань, в которую заворачивался тюк мехов, – это же слово, кстати, родственно и слову «сорочка». А потом оно стало обозначать 40 любых предметов, не обязательно шкурок, вытеснив более древнее «четыре десяте».

Интересно, что в некоторых других европейских языках нерегулярность в образовании числительных тоже связана с числами, кратными 20. Видимо, это оставшиеся в языках отголоски использовавшегося в древности счёта двадцатками, а не десятками. Например, французские числительные, кратные 10, образуются более или менее регулярно от 30 и вплоть до 60:

1	un	10	dix
2	deux	20	vingt
3	trois	30	trente
4	quatre	40	quarante
5	cinq	50	cinquante
6	six	60	soixante
7	sept	70	…

Тут нас ждёт сюрприз: число 70 по-французски выглядит как soixante-dix, дословно «шестьдесят-десять». По-русски так мог бы сказать ребёнок, который только учится считать, и это было бы ошибкой, – а по-французски это будет правильно! Дальше идут soixante-onze («шестьдесят-одиннадцать», 71), soixante-douze («шестьдесят-двенадцать», 72) и так далее – вплоть до 80. Здесь нас подстерегает ещё одна неожиданность: 80 по-французски будет «quatre-vingts», дословно «четыре двадцатки». Вот он, счёт двадцатками! Следующий «двадцаток» (а не десяток!) чисел будет уже начинаться с quatre-vingt: quatre-vingt-un («четырежды двадцать и один», 81), quatre-vingt-deux (82), и т. д.: после 89 будет идти quatre-vingt-dix («четырежды двадцать и десять», то есть 90), вплоть до 99, которое выглядит как «quatre-vingt-dix-neuf» – то есть «четырежды двадцать и девятнадцать», или «четырежды двадцать, десять и девять».

Интересно, что во франкоязычных частях Бельгии и Швейцарии этой нерегулярности, которая так усложняет жизнь иностранцам, нет. Там числительные для 70, 80 и 90 образуются регулярным образом: septante – 70, octante – 80, nonante – 90. Иногда, правда, встречаются и промежуточные варианты: автору этих строк доводилось слышать, как франкоязычные швейцарцы произносили «90» как «octante-dix» – то есть «восемьдесят-десять».

Ещё более сложная система счёта используется в датском языке. Там тоже можно проследить остатки счёта двадцатками. Вот как выглядят числа от 1 до 9 и соответствующие им десятки:

1	en	10	ti
2	to	20	tyve
3	tre	30	tredive
4	fire	40	fyrre
5	fem	50	halvtreds
6	seks	60	tres
7	syv	70	halvfjerds
8	otte	80	firs
9	ni	90	halvfems

Если с числами 10, 20, 30 и 40 всё примерно понятно, то дальше начинается что-то совсем странное.

Во-первых, слова для чисел 60 и 80, tres и firs, оказываются похожи не на 6 и 8 (seks и otte), а на 3 и 4 (tre и fire). Наверное, вы уже догадались, что это тоже связано со счётом двадцатками. Действительно, tres и firs – это сокращения от слов tresindtyve (tre-sinde-tyve) и firsindetyve (fire-sinde-tyve), что и значит «трижды двадцать» и «четырежды двадцать».

А что с 50, 70 и 90? Сами эти слова образованы по той же модели, что слова для 60 и 80: halvtredje-sinde-tyve (50), halvfjerde-sinde-tyve (70) и halvfemte-sinde-tyve (90). То есть это тоже какое-то количество двадцаток – только уже не целое, как 60 и 80, а... полуцелое: две с половиной, три с половиной и четыре с половиной. Это же объясняет и приставку halv-, в которой читатель, знающий английский или немецкий язык, уже наверняка узнал слово «половина» (по-английски half, по-немецки Hälfte).

Оказывается, в этих формах числительных сохранился архаический способ обозначения полуцелых чисел: слово halvtredje когда-то значило «два с половиной», или, дословно, «половина третьего» (то есть «три без половины»), слово halvfjerde – «половина четвёртого», то есть 3,5, и так далее. Сейчас эти слова уже не используются: в современном датском осталась только форма для числа 1,5 – halvanden (halv+anden), значащая «половина второго».

Когда-то такой же способ обозначать полуцелые числа существовал и в русском языке: скажем, в новгородских берестяных грамотах регулярно встречаются сочетания вроде «полчетверты гривны» – и это, конечно, означает «3,5 гривны» (а не, скажем, половину от четырёх гривен). Сейчас в русском языке такая конструкция осталась только в словах «полтора» (то есть «пол-втора», два без половины — точно так же, как в датском) и «полтораста». Да ещё похожие формы остались в обозначениях времени: например, «полдевятого» значит «восемь с половиной часов», то есть «девять часов без половины часа».

Задача *(С.И. Переверзева)*. Маленькому Лёве четыре года. Он учится называть числа, записанные цифрами. Многие числа – например, 0, 2, 4, 23, 31 и 35 – он называет правильно, но в некоторых делает ошибки. Так, в названиях чисел 30 и 51 он делает по одной ошибке. Обе ошибки по-своему логичны.

Напишите, как Лёва называет числа: а) 30; б) 51.

Художник Елизавета Сухно

Антон Сорокин, Константин Коханов, Денис Перевощиков, Марина Уварова, Антон Зеленеев

ПРОСТЫЕ ОПЫТЫ С ТРУБКАМИ

Ниже описаны простые опыты с пластиковыми трубками, предложенные участникам Всероссийского школьного учебного турнира по физике «ШУНТ». Для экспериментов подойдут обрезки водопроводных ПВХ-труб длиной около 10 см, диаметром 2,5 см.

ОПЫТ 1.

Притяжение или отталкивание?

Оказывается, две трубки, лежащие параллельно друг другу на расстоянии примерно 1 см, можно заставить сближаться или удаляться друг от друга, подув в зазор между ними. В каком случае трубки сближаются или удаляются и почему? Для ответа на вопросы проведём два эксперимента.

Положим две лёгкие пластиковые трубки на чистую горизонтальную поверхность стола параллельно друг другу и подуем сверху вниз в зазор между ними. Трубки покатятся в противоположные друг от друга стороны.

Повторим эксперимент, но только в этот раз будем дуть в зазор между трубками не сверху вниз, а горизонтально, вдоль поверхности стола. Они покатятся навстречу друг другу, пока не столкнутся!

Объясните полученные результаты.

Оказывается, трубки можно заставить сближаться даже тогда, когда мы подуем на них сверху!

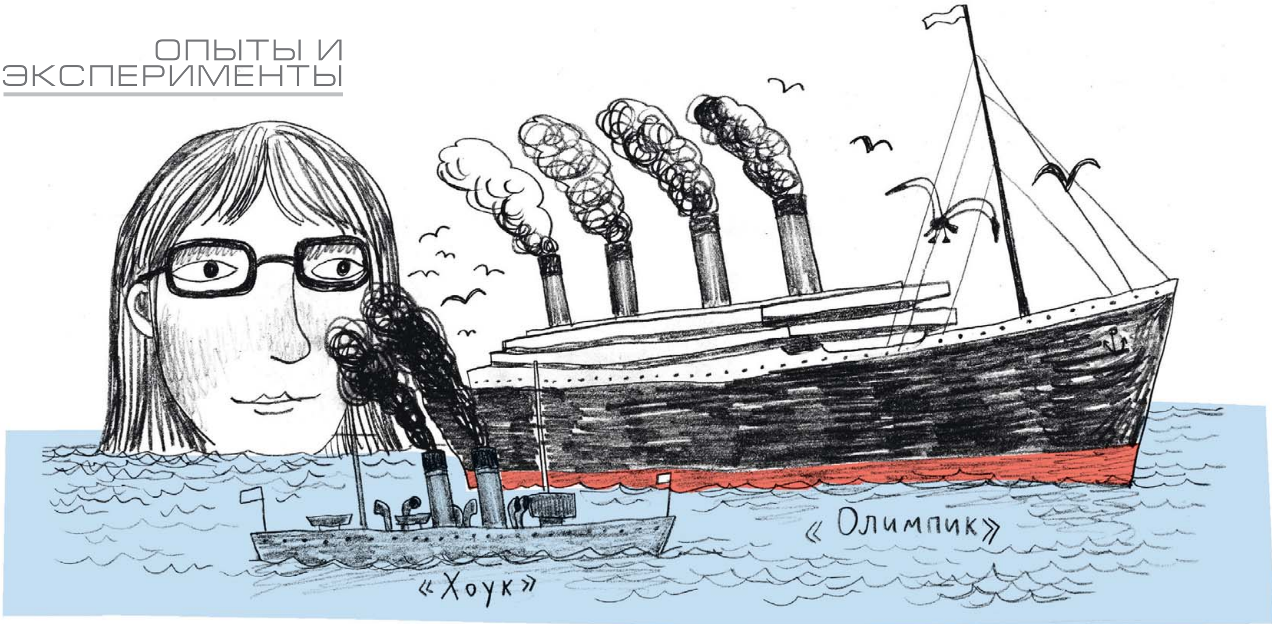
Каким образом можно достичь такого результата?

Объяснение

В первом опыте поток воздуха попадает в зазор между трубками и не имеет возможности свободно проходить сквозь него, отчего давление воздуха возрастает и расталкивает трубки.

Во втором опыте поток воздуха свободно проходит вдоль трубок и, обладая высокой скоростью, по принципу Бернулли создаёт пониженное давление между трубками. В результате окружающий воздух с бóльшим давлением сближает трубки.

Чтобы трубки могли сближаться, когда мы дуем на них сверху, достаточно дать возможность попадающему на них воздуху без задержки проходить между ними. Вариантов, как это сделать, много: один конец каждой



трубки положить на край учебника, обе трубочки аккуратно расположить на пластиковых трубочках (рис. 1), и др.

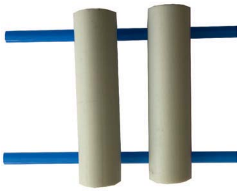


Рис. 1

ОПЫТ 2. Движение по волнам

Те читатели, которые уже изучили волны в школьном курсе физики, знают, что волны хотя и оказывают действие на препятствие, не переносят с собой вещество. То есть, например, уплывший в речке мячик нельзя прибить к берегу волнами, созданными брошенными позади мячика камнями.

Однако в прошлом мореплаватели часто сталкивались с явлением, которое на первый взгляд противоречит известному свойству волн: при сильных волнах, даже при полном отсутствии ветра, стоящие рядом в порту корабли могут сближаться вплоть до соударения друг с другом.

Это явление легко пронаблюдать с помощью наших трубочек. Чтобы трубки легко держались на воде, достаточно вставить в отверстия заглушки, например из пластилина.

Итак, заполнив тазик водой, положите на поверхность воды на расстоянии 2–5 см друг от друга две трубки, а затем, периодично ударяя пальцем по поверхности воды, создайте волны. Через небольшое время трубки действительно сомкнутся друг с другом!

Объяснение

Почему трубки-кораблики сблизились? Оказывается, причин здесь несколько, и то, какая из них сыграет наибольшую роль, зависит от многих факторов (расположения кораблей по отношению к волне, близости кораблей к берегу, и др.). В нашем эксперименте весомое значение имеет действие набегающей на ближний кораблик волны в самый первый момент, то есть когда волна от источника только-только достигнет его стенок. На кораблик действует так называемый волновой фронт. В результате первый кораблик начинает двигаться ко второму. Действие волны на второй кораблик будет заметно

меньше (ведь он закрыт от волны первым корабликом), так что он не сможет отплыть и увернуться от первого.

ОПЫТ 3. Крестик или нолик?

На противоположных концах одной из трубок нарисуйте значки «Х» и «О» (рис. 2). Надавите на один из концов трубки указательным пальцем так, чтобы она выскользнула из-под него, начав вращаться на столе.

Рис. 2

Удивительно, но если посмотреть на вращающуюся на столе трубку сверху, отчётливо будет виден строго один из написанных значков – либо только «Х», либо только «О»!

Объясните полученный результат. Изучите, от чего зависит появление того или иного значка.

Объяснение

Всё дело в сложном движении трубки. При описанном способе запуска каждая её точка вращается в горизонтальной плоскости вокруг середины трубки, а ещё вокруг оси трубки. Получается, что для каждой точки трубки складываются два движения, причём для некоторых точек направления этих движений сонаправлены, а для других – направлены противоположно.

Написанный значок виден тогда, когда направление его движения вокруг оси трубки противоположно направлению движения вокруг центра трубки, то есть когда результирующая скорость значка минимальна.

Стоит заметить, что если, например, для значка «Х» суммарная скорость будет минимальна, то для значка «О» – максимальна, и наоборот (рис. 3). Поскольку наш глаз не способен рассматривать быстродвижущиеся объекты, то значок «О» он не увидит, а вот медленно движущийся «Х» успеет рассмотреть.

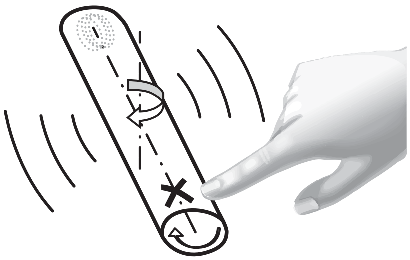


Рис. 3

Художник Артём Костюкевич

LXXXV САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Материал подготовили Надежда Власова, Константин Кохась

Санкт-Петербургская олимпиада по математике проводится для школьников с 6 по 11 класс. Второй (городской) тур очередной олимпиады для 6–8 классов прошёл 10 февраля 2019 года, на него приглашались победители районного тура. Приводим задачи для 6 класса второго тура и одну расширенную задачу для 7 класса.

Задачи II тура для 6 класса

1. Клетки таблицы 4×4 заполнены целыми числами. В каждой строке и каждом столбце посчитали произведение всех чисел. Могли ли получиться числа 1, 5, 7, 2019, −1, −5, −7, −2019 в некотором порядке?

Александр Храбров

2. Будем называть *простенькими* все нечётные простые числа, а также число 1. В ряд стоят 2019 рыцарей и лжецов. Каждый из них сказал: «Количества рыцарей справа и слева от меня отличаются на простенькое число». Сколько рыцарей может быть в этом ряду?

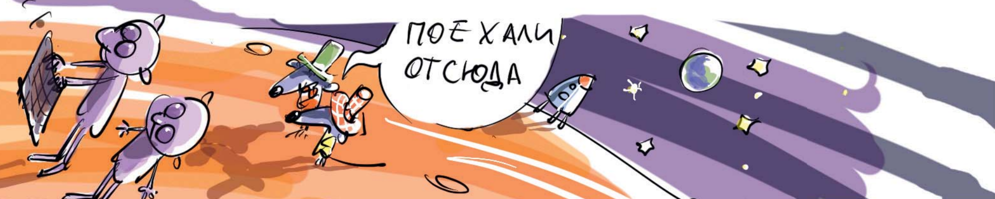
Александр Кузнецов

3. Для каждого числа от 1 до 1000 выписали все его натуральные делители (в результате некоторые числа выписаны много раз). Определите, что больше: сумма всех выписанных чисел или миллион?

Александр Храбров

4. В марсианском календаре дни недели называются так же, как у нас, но в каждой неделе может быть от одной до семи пятниц, из-за чего неделя может длиться от 7 до 13 дней. В разных неделях может быть разное число пятниц. Министру принесли календарь на ближайшие 2019 недель. Министр решает, какие дни недели он на этот период времени объявит выходными. (Например, он может сделать выходными все понедельники, среды и воскресенья, или просто все четверги). Докажите, что он может сделать это так, чтобы в каждой неделе не меньше 2/7 от числа дней этой недели были выходными, но при этом суммарно выходными были не более половины дней.

Надежда Власова, Константин Кохась



5. Спортзал в виде квадрата со стороной 100 метров замощён квадратными плитками 1 м $\times$ 1 м. Двое по очереди покрывают пол спортзала матами. Каждый мат покрывает две соседние по стороне плитки пола. Начинающий игру своим ходом кладёт один мат, а второй игрок – сразу три мата. Плитки, на которые кладут очередной мат, могли быть покрыты матами на предыдущих ходах (возможно, что разные плитки покрыты разным числом матов), но ни в какой момент игры ни одна плитка не должна быть покрыта более чем пятью матами. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что при правильной игре выиграет второй игрок.

Сергей Берлов

6. На встречу собралась компания. Назовём человека *общительным*, если в этой компании у него есть не меньше 20 знакомых, причём хотя бы двое из них знакомы между собой. Назовём человека *стеснительным*, если в этой компании у него есть не меньше 20 незнакомых, причем хотя бы двое из них незнакомы между собой. Оказалось, что в собравшейся компании нет ни общительных, ни стеснительных людей. Какое наибольшее число людей может в ней быть?

Фольклор

Дополнение

На самой олимпиаде для 7 класса был дан только пункт б) следующей задачи.

7. Саша выбрал четыре натуральных числа x, y, z, t и выписал 12 дробей:

$$\frac{x}{y}, \frac{x}{z}, \frac{x}{t}, \frac{y}{x}, \frac{y}{z}, \frac{y}{t}, \frac{z}{x}, \frac{z}{y}, \frac{z}{t}, \frac{t}{x}, \frac{t}{y}, \frac{t}{z}.$$

Докажите, что какие-то две дроби отличаются не больше чем на

а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{11}{60}$; в) $\frac{1}{6}$.

Александр Кузнецов

Игры и головоломки

Владимир Красноухов

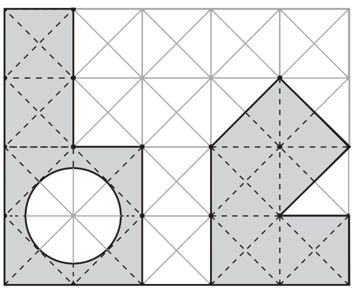
Два симметрикса

Художник Александра Будилкина

УОЛ

В этой головоломке всего лишь два элемента, которые несложно изготовить по прилагаемому эскизу.

Задача. *Соберите симметричную фигуру. Элементы можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.*



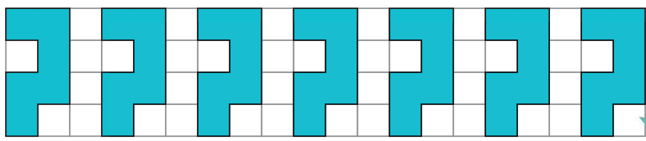
Задача эта несложная, особенно для тех, кто знает, что означает название этой головоломки на якутском языке. Впрочем, не будем ничего подсказывать и лишать вас удовольствия от самостоятельного решения задачи.

СЕМЬ ВОПРОСОВ

(очень трудная задача)

Даны семь одинаковых элементов гексамино в виде знака вопроса.

Взяв всего два «вопроса», можно последовательно собрать из этих элементов 22 связные симметричные фигуры. Из четырёх элементов – более 2200 таких фигур, из шести – уйму, даже неохота подсчитывать сколько. Из трёх или из пяти элементов не удаётся собрать ни одной симметричной фигуры.



Задача. *А вот из семи элементов собрать связную симметричную фигуру можно. Попробуйте!*

Автор этих головоломок (В. Красноухов) утверждает, что каждая имеет единственное решение. Так ли это?

Желаем успехов!

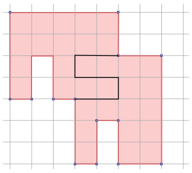
НАШ КОНКУРС, VIII ТУР
(«Квантик» № 4, 2019)

36. *Ствол одного дерева распилили на несколько частей, а потом ствол другого дерева распилили за вдвое большее время на другое число частей. Докажите, что во втором случае число частей нечётно. (На каждый распил тратили одно и то же время.)*

Во втором случае было вдвое больше распилов, то есть чётное число. А частей на 1 больше, чем распилов, то есть нечётное число.

37. *Можно ли из 1000 чисел 1, 1/2, 1/3, ..., 1/1000 выбрать 8 чисел и записать их в ряд так, чтобы разности между соседними числами были одинаковы?*

Ответ: да. Возьмём наименьшее число, делящееся на все числа от 1 до 8 (наименьшее общее кратное чисел 1, ..., 8). Это 840 и оно меньше 1000. Поэтому набор 1/840, 2/840, 3/840, ..., 8/840 подходит – это числа 1/840, 1/420, 1/280, 1/210, 1/168, 1/140, 1/120 и 1/105.



38. *Разделите данную фигуру на две равные части.*

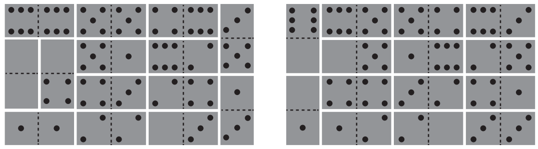
Ответ: разрез показан на рисунке из условия чёрной линией.

39. *У Кости было 26 одинаковых на вид монет, среди них 21 – настоящие, которые весят поровну, и 5 – фальшивые, которые тоже весят поровну, но несколько легче. Все вместе они весили 421 г. Костя потерял 5 монет, и теперь оставшиеся весят только 340 г. Сколько весит настоящая монета?*

Ответ: 16,2 грамма. Заметим, что средняя масса оставшихся монет, равная 340/21, меньше, чем средняя масса потерянных монет, равная $(421-340)/5=81/5$. Допустим, что среди потерянных монет есть хотя бы одна фальшивая. Тогда доля фальшивых монет среди потерянных – хотя бы 1/5, а среди оставшихся – не более 4/21, что меньше 1/5. Но в таком случае средняя масса оставшихся монет была бы больше средней массы потерянных. Поэтому все потерянные монеты – настоящие, и одна монета весит $(421-340)/5=16{,}2$ грамма.

40. *Костяшка домино имеет вид прямоугольника 1×2, разделённого на два квадратика 1×1, на каждом квадратике выбито от 0 до 6 очков. В полном наборе домино 28 неповторяющихся костяшек. Можно ли уложить их все в коробку 4×7 в два слоя так, чтобы каждые два квадратика, находящиеся на одном и том же месте в разных слоях, содержали одинаковое число очков?*

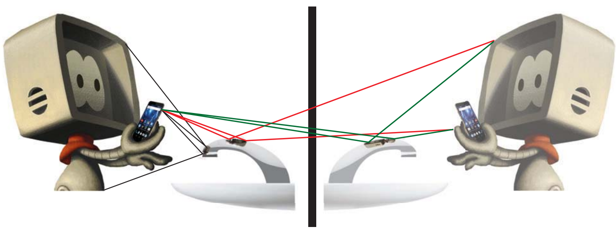
Ответ: да. Пример приведён на рисунке.



ОТРАЖЕНИЯ В КРАНЕ
(«Квантик» № 5, 2019)

Маленькое изображение – реальное отражение автора в кране. Маленькое оно потому, что кран короткий и автор стоял рядом с концом крана почти перпендикулярно ему. А большое изображение в кране получилось после отражения от вертикального зеркала, которого на фотографии не было видно. Можно считать, что второе отражение – это отражение в кране зазеркального двойника автора, расположенного по другую сторону от зеркала.

На одной фотографии можно получить целых три отражения (см. фото): отражение автора в кране, отражение зазеркального двойника в кране и отражение зазеркального двойника в отражении крана (см. схему лучей на рисунке).



В НАЧАЛЕ БЫЛО СЛОВО ...

Подсказки

1. В любых треугольниках?
2. Какие именно углы равны?
3. Пусть один треугольник – остроугольный, а другой – тупоугольный.

4. О каком количестве точек идёт речь?
5. Хорда окружности стягивает две дуги.
6. Сколько общих касательных может быть у двух окружностей?
7. Рассмотрите по отдельности каждый вид треугольника (по углам).
8. Соедините, например, середины основания и боковой стороны.
9. Четырёхугольники бывают невыпуклыми.
10. Рассмотрите по отдельности каждый вид треугольника (по углам).
11. Любая медиана?
12. Рассмотрите точку на луче, дополнительном к биссектрисе.
13. Можно ли выбрать любую высоту?
14. Сколько равных наклонных можно провести к прямой?
15. Сколько радиусов можно провести в окружности?
16. Будет ли хордой окружности её диаметр?
17. А квадрат является параллелограммом?

Ответы

1. В **равных** треугольниках напротив равных сторон лежат равные углы.

2. Если катет и прилежащий к нему **острый** угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

3. Если две стороны и высота, проведённая к третьей стороне одного **остроугольного** треугольника, соответственно равны двум сторонам и высоте, проведённой к третьей стороне другого **остроугольного** треугольника, то такие треугольники равны.

4. **Все** точки плоскости, удалённые на данное ненулевое расстояние от заданной точки O, образуют окружность с центром O.

5. Равные хорды окружности стягивают равные **меньшие (бóльшие)** дуги.

6. Две общие **внешние (внутренние)** касательные к двум неравным окружностям пересекаются на прямой, содержащей их центры.

7. Наименьший диаметр окружности, внутри которой можно поместить данный **остроугольный (прямоугольный)** треугольник, – это диаметр окружности, описанной около треугольника.

8. Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины её **боковых** сторон.

9. Если все стороны и диагональ одного **выпуклого** четырёхугольника соответственно равны сторонам и диагонали другого **выпуклого** четырёхугольника, то равны и другие их диагонали.

10. Середины трёх высот **непрямоугольного** треугольника не лежат на одной прямой.

11. В равнобедренном треугольнике медиана, **проведённая к основанию**, является биссектрисой и высотой.

12. Если точка, **лежащая внутри угла**, равноудалена от сторон угла, то она лежит на биссектрисе этого угла.

13. Площадь треугольника равна половине произведения стороны и высоты, **проведённой к ней.**

14. Равным наклонным к прямой, **проведённым из одной точки**, соответствуют равные проекции.

15. Касательная к окружности перпендикулярна её радиусу, **проведённому в точку касания.**

16. Диаметр окружности, проходящий через середину хорды, **не являющейся диаметром**, перпендикулярен ей.

17. Параллелограмм, **отличный от прямоугольника и ромба**, не имеет оси симметрии.

ГОВОРЯТ ДЕТИ

1. Маша хотела сказать что-то вроде «Чипи-Дэйла». Иными словами, она просила, чтобы ей дали снова посмотреть знаменитый диснеевский сериал **«Чип и Дэйл спешат на помощь»**.

2. Вместо *надувать щёки* маленький Лёва говорит (вполне естественно) *делать большие щёки*. А во «взрослом» русском языке есть выражение ***делать большие глаза*** «разыгрывать крайнее удивление».

3. Город называется **Вифлеем**: согласно Евангелиям, это город, в котором родился Иисус Христос. Света в шутку переделала это название в «Вафли ем».

4. Прозвище *Золушка* образовано от слова *зола* и буквально означает что-то вроде «замарашка». Но маленькая внучка, конечно, рассуждала совсем иначе: «Меня зовут Золушка, – отвечала она бабушке-Принцу, – потому что я приехала сюда **в золотой карете**».

ЛУНОХОД

а) Ответ: может.

Отметим на планете полюса N и S, и пусть точки A, B, C и D делят соответствующий экватор на четыре равных дуги, как на рисунке 1.

Рассмотрим замкнутый путь $A \to B \to S \to D \to C \to$ $\to N \to A$ по поверхности, состоящий из дуг больших окружностей с центрами в центре планеты. Этот путь состоит из 6 одинаковых дуг длиной в 1/4 экватора, поэтому длина пути составляет 600 км.

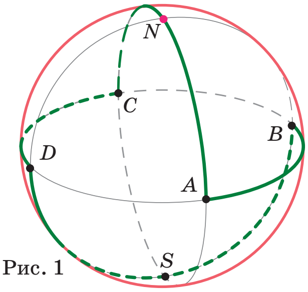


Рис. 1

Покажем, что луноход побывал на расстоянии не более 50 км от каждой точки. Поверхность планеты разобьём на 8 одинаковых сферических треугольников с вершинами в отмеченных точках. Луноход побывал во всех вершинах и во всех точках хотя бы одной стороны каждого треугольника.

Так как расстояние по поверхности от полюса до экватора 100 км, то поверхность планеты разбивается на экваториальный пояс – точки, удалённые от экватора на расстояние не более 50 км, – и две полярные шапки – точки, удалённые от полюсов на расстояние не более 50 км. На рисунке зелёная часть треугольника исследована луноходом, так как он проехал вдоль стороны, а красная исследована, так как он побывал в вершине.

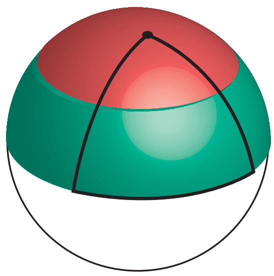


Рис. 2

б) Ответ: может.

Снова разобьём поверхность планеты на 8 равных треугольников. *Средней параллелью* треугольника назовём часть линии, параллельной стороне треугольника и соединяющей середины двух других сторон. На рисунке 2 средняя параллель треугольника лежит на границе красной и зелёной областей.

Пусть луноход прошёл по средним параллелям всех треугольников, как на рисунке 3.

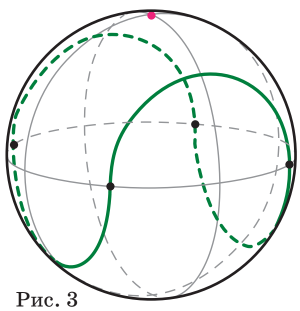


Рис. 3

Вся поверхность планеты будет исследована, потому что любая точка треугольника находится на расстоянии не более 50 км от некоторой точки средней параллели, что видно из рисунка 2.

Наконец, докажем, что длина окружности, на которой лежит средняя параллель, в $\sqrt{2}$ раз меньше длины экватора. Из этого будет следовать, что длина пути равна $\frac{800}{\sqrt{2}}$, что примерно равно 566.

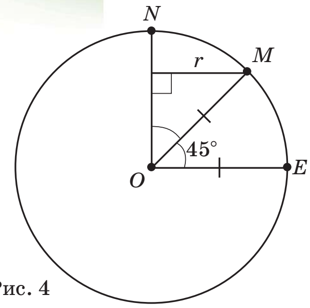


Рис. 4

Пусть N и E – вершины треугольника, O – центр планеты. Радиус окружности, на которой лежит средняя параллель, равен расстоянию r от середины M дуги NE до прямой ON. Из рисунка 4 видно, что $r = \frac{OE}{\sqrt{2}}$. Значит, радиус меньшей окружности в $\sqrt{2}$ меньше радиуса планеты, что и требовалось.

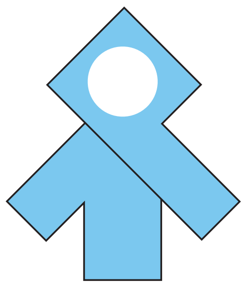
Интересно было бы узнать, какова наименьшая возможная длина такого пути. Можно доказать (правда, не совсем элементарно), что она заведомо больше 500.

СЧЁТ ДВАДЦАТКАМИ

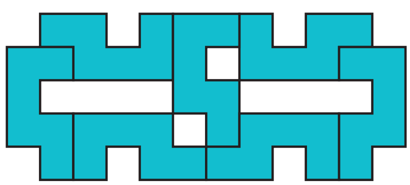
а) Поскольку числа 31 и 35 Лёва называет правильно, само слово «тридцать» у него не вызывает затруднений. Как читается 0, он тоже знает. Видимо, Лёва руководствуется такой аналогией: если 35 – «тридцать пять», 31 – «тридцать один», то **30 – «тридцать ноль»**.

б) Поскольку число 31 Лёва называет без ошибок, «один» в 51 он наверняка тоже называет правильно. Тогда ошибка кроется в слове «пятьдесят». Видимо, Лёва и тут использует аналогию: поскольку 2 и 3 («два» и «три») в начале двузначного числа читаются как «два-дцать» и «три-дцать», то и 5 («пять») в начале двузначного числа «должно» читаться как... «пять-дцать». Тем самым, **51 – «пятьдцать один»**.

ДВА СИММЕТРИКСА



Уол (по-якутски *мальчик, сын*)



«7 вопросов»

LXXXV САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

1. Ответ: да, можно. Один из возможных примеров изображён на рисунке.

1	–1	1	1
1	5	1	1
1	1	7	1
1	1	–1	2019

2. Ответ: 0, 2, 4, 6 или 8 рыцарей

Пусть в ряду стоят $n > 8$ рыцарей. Тогда у самого левого из них разность между числом рыцарей справа и слева от него равна $n-1$, у второго слева равна $n-3$, у третьего слева равна $n - 5$. Все эти числа имеют разные остатки при делении на 3, поэтому одно из них делится на 3 и при этом больше 3, если $n > 8$, следовательно, не простенькое. Значит, этот случай невозможен.

А ещё количество рыцарей не может быть нечётным, так как в этом случае разность между количествами рыцарей справа и слева от любого рыцаря чётна, а чётные числа не простенькие.

Покажем, что рыцарей могло быть любое чётное число от 0 до 8. Действительно, поставим всех рыцарей подряд в левый конец ряда, то есть так, чтобы любой рыцарь находился левее любого лжеца. Тогда разность между количеством рыцарей справа и слева от любого рыцаря будет равняться 1, 3, 5 или 7 – все эти числа являются простенькими. А для любого лжеца эта разность равна 8, то есть не простенькая.

3. Ответ: миллион.

Сложим отдельно все выписанные единицы, все выписанные двойки и т. д.

Рассмотрим любое n, где $1 \leqslant n \leqslant 1000$. Оно является делителем чисел n, $2n$, $3n$, ..., kn, где kn – самое большое число, не превосходящее 1000 и делящееся на n. Значит, $k = \left[\frac{1000}{n}\right]$ и n выписано $\left[\frac{1000}{n}\right]$ раз. Тогда сумма всех выписанных экземпляров числа n равна $n \cdot \left[\frac{1000}{n}\right] \leqslant$ $\leqslant 1000$ (здесь $[x]$ – это целая часть x).

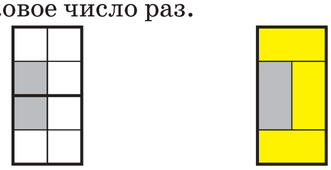
Всего мы подсчитали 1000 сумм и каждая не превосходит 1000. Но многие из сумм меньше 1000; например, число $n = 3$ выписано 333 раза и даёт вклад 999 в общую сумму. Значит, итоговая сумма всех чисел меньше миллиона.

4. Рассматриваемый промежуток времени из 2019 недель будем называть *годом*. Пусть министр попробует сделать выходными все понедельники, вторники, среды и четверги. Тогда в каждой неделе будет 4 выходных и максимум 13 дней, то есть доля выходных не меньше $\frac{4}{13} > \frac{2}{7}$. Если при этом за год доля числа выходных окажется не больше половины, то всё получилось.

В противном случае понедельники, вторники, среды и четверги составляют в сумме больше половины всех дней в году. Но тогда суммарное количество пятниц, суббот и воскресений меньше половины. Сделаем выходными их! В этом случае каждая неделя содержит не менее 7 дней, ровно 4 дня из которых рабочие. То есть рабочие дни составляют не более $\frac{4}{7}$ каждой недели, а тогда выходных даже не меньше $\frac{3}{7}$.

5. Приведём стратегию для второго игрока. Сначала он мысленно разбивает зал на квадратики 2×2 (будем называть их *блоки*) и потом каждый раз ходит так, чтобы после его хода в каждом блоке все клетки были покрыты матами одинаковое число раз.

Докажем, что второй игрок всегда сможет сделать ход по этой стратегии. Если первый игрок положил мат, пересекающий два блока, то второй кладёт свои маты так, чтобы они покрыли остальные клетки этих двух блоков ровно по одному разу (см. пример на рисунке). Очевидно, что если первый игрок мог положить мат на эти блоки, то и второй может, так как до этого хода клетки каждого блока были покрыты одинаковое число раз.



Ход первого игрока Ответ второго игрока

Если же первый игрок положил свой мат только на один блок, то второй кладёт один свой мат на две другие клетки того же блока (очевидно, это можно сделать). А также двумя другими матами второй игрок покрывает в один слой произвольный блок, покрытый не более четырёх раз. Покажем, что такой блок обязательно найдётся. Действительно, иначе все блоки уже покрыты в 5 слоёв, то есть всего положено $\frac{5 \cdot 100 \cdot 100}{2}$ матов. Это число делится на 4, что невозможно, так как за каждую пару ходов игроки кладут по 4 мата и ещё два мата положены за ход первого и часть хода второго.

Таким образом, второй игрок всегда может сделать ход, а значит, не проиграет.

6. Ответ: 40.

Оценка. Предположим, что какой-то человек (назовём его Костей) знаком хотя бы с 20 людьми. Если какие-то из Костиных знакомых знакомы между собой, то Костя общительный. Разберём случай, когда все Костины знакомые незнакомы друг с другом. В этом случае, если Костя знаком хотя бы с 21 человеком, то любой из его знакомых стеснительный.

Аналогично, если Костя незнаком с 20 людьми, среди которых есть незнакомые между собой, то Костя стеснительный. А в случае, когда Костя незнаком с 21 человеком, и при этом все, кто незнаком с Костей, между собой знакомы, то все они общительные.

Значит, если в компании хотя бы 41 человек, то Костя знаком ровно с 20 людьми и ровно с 20 людьми незнаком. При этом все знакомые Кости незнакомы друг с другом, а все незнакомые с Костей – знакомы друг с другом. Рассмотрим любого человека, знакомого с Костей, скажем, Васю и любого человека, незнакомого с Костей, скажем, Петю. Если Вася и Петя знакомы, то Петя общительный, так как он знаком с Васей и ещё с 19 людьми, незнакомыми с Костей, при этом те, кто незнаком с Костей, знакомы друг с другом. Аналогично, если Вася и Петя незнакомы, то Вася стеснительный.

Пример. Поделим компанию из 40 человек на две группы по 20 человек. Пусть люди из одной группы знакомы друг с другом, а люди из разных групп незнакомы. Тогда если бы нашёлся какой-то общительный человек, то все его знакомые находились бы с ним в одной группе, а тогда в этой группе был бы хотя бы 21 человек. Если же нашёлся стеснительный человек, то все люди, незнакомые с ним, находились бы в одной группе, а значит, были бы знакомы друг с другом.

7. Заметим, что если Саша выбрал два одинаковых числа (например, x и y), то он написал две дроби, равные 1 $\left(\text{это } \frac{x}{y} \text{ и } \frac{y}{x}\right)$, и тогда утверждение задачи очевидно. Значит, можно считать, что все Сашины числа различны. Пусть $x<y<z<t$. Тогда Саша выписал ровно 6 дробей, которые меньше 1, это дроби $\frac{x}{y}, \frac{x}{z}, \frac{x}{t}, \frac{y}{z}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$.

а) После этого наблюдения утверждение пункта а) очевидно: среди любых 6 чисел от 0 до 1 можно выбрать два, разность которых не превосходит $\frac{1}{5}$. Действительно, если бы разность любых двух чисел была бы больше $\frac{1}{5}$, то на каждом из 5 отрезков $\left[0, \frac{1}{5}\right]$, $\left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right]$, $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$, $\left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$, $\left[\frac{4}{5}, 1\right]$ находилось бы не больше одного числа, то есть количество чисел было бы не больше 5.

б) Выпишем Сашины дроби в порядке возрастания: $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{12}$. Тогда дроби $q_1, q_2, \ldots, q_6$ меньше 1, а q_7 – самая маленькая из дробей, превосходящих 1. Нетрудно догадаться, что $q_7=\frac{1}{q_6}$, $q_8=\frac{1}{q_5}$ и т.д.

Предположим, что любые две дроби отличаются хотя бы на $d=\frac{11}{60}$. Тогда $q_1>0$, $q_2>q_1+d>d$, $\ldots$, $q_6>q_5+d>5d$, $q_7>q_6+d>6d$. Следовательно, $1=q_6q_7>5d\cdot 6d=5\cdot 6\cdot\left(\frac{11}{60}\right)^2=\frac{121}{120}$. Противоречие.

в) Проверим, что найдутся две дроби, которые отличаются не больше чем на $\frac{2}{13}$. Так как $\frac{2}{13}<\frac{1}{6}$, мы докажем более сильное утверждение.

Очевидно, $\frac{x}{t}$ – самая маленькая дробь. Пусть все дроби отличаются более чем на $\frac{2}{13}$, тогда $\frac{x}{t}<\frac{3}{13}$, потому что иначе наши 6 дробей распределены по пяти отрезкам $\left[\frac{3}{13}, \frac{5}{13}\right]$, $\left[\frac{5}{13}, \frac{7}{13}\right]$, $\left[\frac{7}{13}, \frac{9}{13}\right]$, $\left[\frac{9}{13}, \frac{11}{13}\right]$, $\left[\frac{11}{13}, 1\right]$, и какие-то две дроби различаются не более чем на $\frac{2}{13}$, противоречие.

Заметим, что для a из $\left[0, \frac{3}{13}\right]$ выполняется неравенство $a+\frac{2}{13}>\frac{5}{3}\cdot a$. Поэтому $\frac{x}{y}\geqslant\frac{x}{t}+\frac{2}{13}>\frac{5}{3}\cdot\frac{x}{t}$ и аналогично $\frac{x}{z}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ больше, чем $\frac{5}{3}\cdot\frac{x}{t}$.

Далее, заметим, что $\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{t}=\frac{x}{t}$. При этом $\frac{x}{y}>\frac{5}{3}\cdot\frac{x}{t}$. Следовательно, $\frac{y}{t}<\frac{3}{5}$ и аналогично $\frac{x}{y}<\frac{3}{5}$. Точно так же, рассматривая произведение $\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{t}=\frac{x}{t}$, заключаем, что $\frac{x}{z}<\frac{3}{5}$, $\frac{z}{t}<\frac{3}{5}$.

Итак, среди наших дробей 5 чисел – $\frac{x}{y}, \frac{x}{z}, \frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ – не превосходят $\frac{3}{5}$. Как и в пункте а) это значит, что разность каких-то двух из них не превосходит $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{20}<\frac{2}{13}$. Противоречие.

наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач X тура, с которыми справитесь, не позднее 1 июля в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: v.ht/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

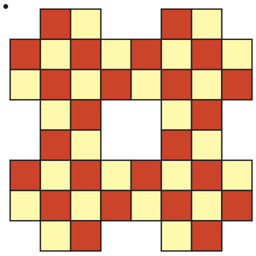
X ТУР

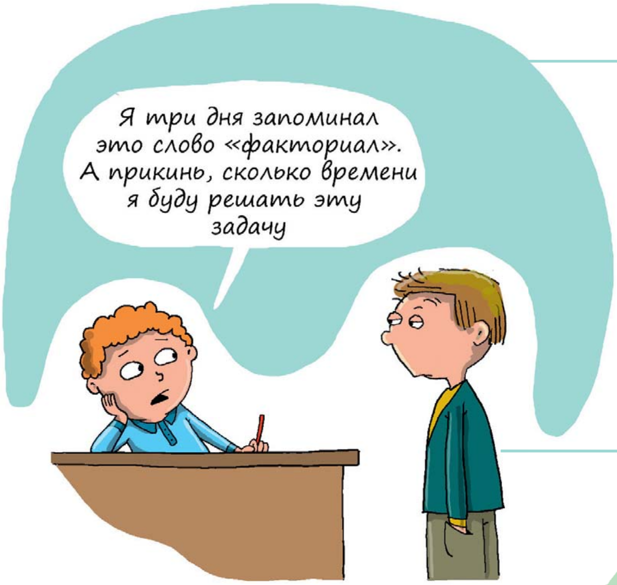
46. Саша придумал признак равенства тупоугольных треугольников: «Если две стороны и высота, проведённая к третьей стороне одного тупоугольного треугольника, соответственно равны двум сторонам и высоте, проведённой к третьей стороне другого тупоугольного треугольника, то такие треугольники равны». Не ошибается ли Саша?

47. Квантик выписал в порядке возрастания все 9-значные числа, в записи каждого из которых участвуют по одному разу все ненулевые цифры от 1 до 9: начиная от 123456789 и кончая 987654321. Затем Квантик выписал все положительные разности соседних чисел этой цепочки и нашёл общую сумму этих разностей. Докажите, что в итоге Квантик получил одно из чисел исходной цепочки 9-значных чисел. Какое именно?

Авторы: Александр Блинков (46), Григорий Гальперин (47), Николай Авилов (48), Андрей Аржанцев (49), Александр Ковальджи (50)

48. Проложите замкнутый маршрут шахматного коня, проходящий по одному разу по всем клеткам изображённой на рисунке фигурной доски.





49. *Факториалом натурального числа n* называется произведение всех целых чисел от 1 до n, то есть $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Обозначение: $n!$ (читается «эн факториал»). Существует ли такое n, что $n!$ равно

а) произведению двух факториалов различных натуральных чисел, больших 1;

б) произведению 2019 факториалов натуральных чисел, которые все различны?

50. У каждого из 100 друзей есть ровно 10 интересов, и у каждых двоих из них ровно 1 общий интерес. Докажите, что у всех 100 друзей есть общий интерес.

Художник Николай Крутиков

НЕИСПРАВНЫЙ ПИКСЕЛЬ

На табло горело верное равенство, но один пиксель был повреждён (он либо горит, а должен быть погашен, либо погашен, а должен гореть).

Исправьте один пиксель так, чтобы равенство снова стало верным.

Участники сообщества www.braingames.ru

Художник Алексей Вайнер

ISSN 2227-7986
19006